Attenzione: Siete invitati a consegnare una sola versione del compito (niente brutte copie), risolto nei fogli protocollo bianchi, a 4 facciate; su tutti scrivete chiaramente cognome e nome. Si può uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il compito.

1

Consideriamo una molla *non lineare* che sviluppa su punti materiale solidali alle estremità P_1 e P_2 le forze $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ così definite ($h, H > 0$):

$$\mathbf{F}_1 = hP_1P_2 + H|P_1P_2|^2 P_1P_2, \quad \mathbf{F}_2 = hP_2P_1 + H|P_2P_1|^2 P_2P_1, \qquad (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}).$$

a) Verificare che il sistema di due punti liberi soggetti a tali forze posizionali è conservativo di energia potenziale:

$$U(OP_1, OP_2) = \frac{1}{2}h|P_1P_2|^2 + \frac{1}{4}H|P_1P_2|^4.$$

b) Si consideri ora il seguente sistema meccanico vincolato. Sull'asse X di un riferimento inerziale $\{O, X, Y, Z\}$, Y verticale ascendente, sono vincolati a scorrere senza attrito due punti materiali $P_1 = (x_1, 0, 0)$ e $P_2 = (x_2, 0, 0)$ di ugual massa m. Sia A il punto geometrico sull'asse X di ascissa $x_A = 3L,\ L > 0$. Tra O e P_1, tra P_1 e P_2, e tra P_2 e A, sono tese **tre** molle del tipo *elastico non lineare* sopra introdotto. Utilizzare i seguenti parametri Lagrangiani x e y così definiti:

$$x_1 = L + x, \qquad x_2 = 2L + y.$$

Verificare che esiste un'ovvia configurazione d'equilibrio e discuterne la stabilità
c) nel caso in cui valga

$$h + 3HL^2 = 1,$$

determinare le frequenze $\omega_1,\ \omega_2$ di piccola oscillazione.

2

Un corpo rigido libero è soggetto alla forza di gravità in approssimazione di superficie terrestre, accelerazione di gravità $\mathbf{g}$: vettore costante. Quanti sono i gradi di libertà?
Dimostrare che per questo sistema meccanico si conserva l'energia totale, che è l'energia cinetica –scriverla con il teorema di König– più l'energia potenziale gravitazionale.

3

Cosa significa che le equazioni di Lagrange sono *invarianti in forma*? Dare dettagli.

4

Sia $H(q, p, t)$ una funzione Hamiltoniana. Dimostrare che se $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, allora H è un integrale primo per le equazioni di Hamilton.

5

Sia S una matrice $2N \times 2N$, simmetrica, $S^T = S$. Si denoti con $\mathbb{E}$ la matrice simplettica di base $2N \times 2N$. Dimostrare che il diffeomorfismo lineare di $\mathbb{R}^{2N}$ in sè,

$$\mathbb{R}^{2N} \ni x \longmapsto y(x) = e^{\mathbb{E}S}x \in \mathbb{R}^{2N},$$

è una trasformazione canonica. Quanto vale la sua valenza c?

(Facoltativo) Scrivere una funzione Hamiltoniana $H(x)$ per cui $y(x) = e^{\mathbb{E}S}x$ è il flusso al tempo $t = 1$ dell'associato sistema differenziale Hamiltoniano.

1

$$\nabla_{OP_1}\left(\frac{1}{2}h|P_1P_2|^2+\frac{1}{4}H|P_1P_2|^4\right)=\nabla_{OP_1}\left(\frac{1}{2}h|OP_2-OP_1|^2+\frac{1}{4}H|OP_2-OP_1|^4\right)=$$
$$=h|OP_2-OP_1|\,\nabla_{OP_1}|OP_2-OP_1|+H|OP_2-OP_1|^3\,\nabla_{OP_1}|OP_2-OP_1|,$$

$$\nabla_{OP_1}|OP_2-OP_1|=-\frac{OP_2-OP_1}{|OP_2-OP_1|},\qquad \nabla_{OP_1}\left(\frac{1}{2}h|P_1P_2|^2+\frac{1}{4}H|P_1P_2|^4\right)=-hP_1P_2-H|P_1P_2|^2P_1P_2=-\mathbf{F_1}.$$

Analogamente per $\mathbf{F_2}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(x,y)&=\tfrac{1}{2}h(L+x)^2+\tfrac{1}{4}H(L+x)^4+\\&+\tfrac{1}{2}h(L+y-x)^2+\tfrac{1}{4}H(L+y-x)^4+\\&+\tfrac{1}{2}h(L-y)^2+\tfrac{1}{4}H(L-y)^4.\\0=\mathcal{U}_x(x,y)&=2hx-hy+H[(L+x)^3-(L+y-x)^3]\\0=\mathcal{U}_y(x,y)&=2hy-hx+H[(L+y-x)^3-(L-y)^3]\end{aligned}$$

L'equilibrio da studiare è $(x_E,y_E)=(0,0)$.

$$\nabla^2\mathcal{U}(0,0)=\begin{pmatrix}2h+6HL^2 & -h-3HL^2\\ -h-3HL^2 & 2h+6HL^2\end{pmatrix}=(h+3HL^2)\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\quad \text{è definita positiva}\Rightarrow\ \text{stabile (per L-D o THND)}$$

$$T(x,y,\dot{x},\dot{y})=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\dot{y}^2.$$

Se $h+3HL^2=1$,

$$0=\det\begin{pmatrix}2-m\omega^2 & -1\\ -1 & 2-m\omega^2\end{pmatrix},$$

$$\omega_1=\sqrt{\frac{1}{m}},\qquad \omega_2=\sqrt{\frac{3}{m}}.$$

2

$$E=T+U=\frac{1}{2}m|v_G|^2+\frac{1}{2}\omega^T\mathcal{I}_G\omega-m\mathbf{g}\cdot OG$$

e vale:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}m|v_G|^2-m\mathbf{g}\cdot OG&=\textit{cost.}:\ \text{è il moto del punto-baricentro dotato di tutta la massa } m,\\ \tfrac{1}{2}\omega^T\mathcal{I}_G\omega&=\textit{cost.}:\ T_G \text{ si conserva perché il secondo membro delle equ. di Euler è nullo.}\end{aligned}$$

3 e **4**: si veda la dispensa.

5

$$e^{\mathbb{E}S}\mathbb{E}(e^{\mathbb{E}S})^T=\left(\mathbb{I}+\mathbb{E}S+\frac{1}{2}(\mathbb{E}S)^2+...\right)\mathbb{E}\left(\mathbb{I}+\mathbb{E}S+\frac{1}{2}(\mathbb{E}S)^2+...\right)^T=$$
$$=\left(\mathbb{I}+\mathbb{E}S+\frac{1}{2}(\mathbb{E}S)^2+...\right)\mathbb{E}\left(\mathbb{I}-S\mathbb{E}+\frac{1}{2}(-S\mathbb{E})^2+...\right)=$$
$$=\left(\mathbb{I}+\mathbb{E}S+\frac{1}{2}(\mathbb{E}S)^2+...\right)\left(\mathbb{I}-\mathbb{E}S+\frac{1}{2}(-\mathbb{E}S)^2+...\right)\mathbb{E}=$$
$$=e^{\mathbb{E}S}(e^{\mathbb{E}S})^{-1}\mathbb{E}=\mathbb{E}.$$

(Facoltativo) $y(x)=e^{\mathbb{E}St}x$ è il flusso di $\dot{x}=\mathbb{E}Sx$, pertanto deve essere $\nabla_xH(x)=Sx$, infine: $H(x)=\frac{1}{2}x^TSx$. Chiaramente, la soluzione del facoltativo offre una soluzione alternativa al problema, dato che $y(x)=e^{\mathbb{E}St}x$ è t. canonica, in quanto flusso Hamiltoniano, per ogni t.